

Olympiades de mathématiques
4^{ème} – Epreuve individuelle
Mardi 24 mars 2020 (14 h à 16 h)

Pour qui ? Quand ? Comment ?

L'épreuve aura lieu au collège, mardi 24 mars de 14h à 16h, à la place des cours habituels (les autres élèves non inscrits iront bien en cours pendant ce temps là), dans une salle qui regroupera tous les élèves volontaires de 4^{ème} qui ont un bon niveau en maths, qui se sentent prêts à chercher durant 2h, à faire des essais, des erreurs, des tentatives et aboutir parfois !

Les Olympiades c'est quoi ?

- un concours organisé dans plusieurs académies en même temps, et gratuit !
- 4 exercices, assez difficiles en général, à traiter obligatoirement (même si on n'aboutit pas, il faut montrer sur sa copie qu'on a cherché les 4)
- calculatrice autorisée, ainsi que matériel de géométrie, ciseaux
- brouillon fourni pour vos nombreux essais et tentatives (faire des maths c'est d'abord chercher)
- épreuve individuelle, aucune communication entre candidat, on ne peut pas poser de question

Exercices de l'année précédente avec des éléments de correction pour voir un peu à quoi ça ressemble :

Exercice 1
La persistance d'un nombre

Dans cet exercice, on considère des nombres entiers supérieurs ou égaux à 10 écrits dans le système décimal. Lorsqu'on multiplie les chiffres qui composent l'écriture d'un nombre entier, on obtient un nouveau nombre. On recommence ce calcul avec ce nouveau nombre et ainsi de suite. Par exemple, pour le nombre 377 :



Le processus s'arrête lorsqu'on obtient un nombre s'écrivant avec un seul chiffre. Il a fallu 4 étapes en tout : on dit que **la persistance de 377 est 4**.

1. Quelle est la persistance de chacun des nombres

- a. 77 ;
- b. 28 534 ;
- c. 6 785 791 ?

2. La persistance de chacun des nombres 2 019 ; 4 806 et 13 970 875 est égale à 1. Quel résultat général ces résultats semblent-ils illustrer ? En donner une preuve.

3. Existe-il un chiffre que l'on pourrait insérer dans l'écriture d'un nombre sans changer sa persistance ?

4. Trouver un nombre s'écrivant avec 20 chiffres dont la persistance soit 4.

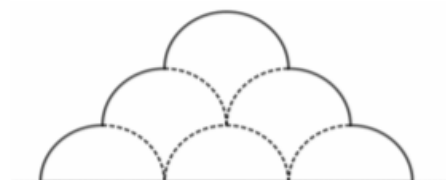
5. Quelles sont les persistance possibles d'un nombre dont l'écriture comporte un chiffre pair et un 5 ?

Correction exercice 1 :

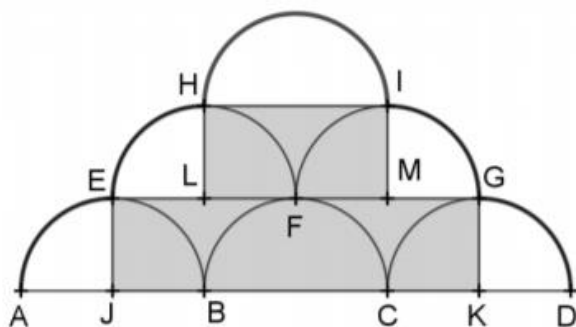
1. **a.** $77 \rightarrow 49 \rightarrow 36 \rightarrow 18 \rightarrow 8$; la persistance de 77 est 4.
- b.** $28\ 534 \rightarrow 960 \rightarrow 0$; la persistance de 28 534 est 2.
- c.** $6\ 785\ 791 \rightarrow 105\ 840 \rightarrow 0$; la persistance de 6 785 791 est 2.
2. Si l'un des chiffres est 0, le produit est nul. La suite des produits s'arrête dès qu'il y a un 0 parmi les chiffres.
3. Le produit par 1 n'a pas d'effet. La persistance d'un nombre dont l'écriture est déduite de celle d'un autre en insérant un 1 est la même que celle du nombre dont il est issu.
4. Le nombre 77 111 111 111 111 111 s'écrit avec 20 chiffres. Sa persistance est 4, comme celle de 77.
5. Le produit de 5 par un nombre (en l'occurrence un chiffre) pair a 0 pour chiffre des unités. La persistance d'un nombre dont l'écriture comporte un 5 et un chiffre pair est donc au plus 2 (elle est égale à 1 dans le cas où l'écriture comporte aussi un 0).

Exercice 4 Six demi-cercles

Six demi-cercles de rayon 1, et les diamètres de trois d'entre eux, déterminent le domaine représenté ci-contre.
Quelle est l'aire de ce domaine ?



Correction exercice 4 :



Le domaine peut être décomposé en 6 quarts de disques de rayon 1 et six carrés de côté 1 (grisés).

L'aire totale peut s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{A} = \frac{6}{4} \pi + 6 = \frac{3}{2} \pi + 6$$

Pour avoir plus d'informations, ou plus d'exercices des années précédentes, aller sur :

<https://euler.ac-versailles.fr/rubrique8.html>